ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales

Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat

CONCOURS D'ADMISSION DE 1984

MATHEMATIQUES - 1ère épreuve - option générale

Lundi 14 mai de 14h à 18h

Dans ce problème a et b sont deux nombres réels ($a < b$). $\mathcal{C}$ est l'ensemble des applications indéfiniment dérivables définies sur $[a,b]$ à valeurs réelles.

Id est l'application identique définie sur $\mathcal{C}$.

δ est l'endomorphisme de dérivation qui à tout élément de $\mathcal{C}$ associe son application dérivée ; donc pour tout $f \in \mathcal{C}$ on a $\delta(f) = f'$. u est l'endomorphisme de primitivation qui à tout élément de $\mathcal{C}$ associe sa primitive qui s'annule en a ; donc pour $f \in \mathcal{C}$ et $x \in [a,b]$ on a $u(f)(x) = \int_a^x f(t)dt$.

On pose $\delta^0 = u^0 = Id$, et pour $k = 1, 2, 3, \ldots, n \ldots$ on définit δ^k et u^k par : $\delta^k = \delta \circ \delta^{k-1}$ et $u^k = u \circ u^{k-1}$.

On rappelle qu'un polynôme unitaire est un polynôme non nul dont le monôme de degré maximum a pour coefficient 1.

Enfin pour $f \in \mathcal{C}$ et $g \in \mathcal{C}$ on désigne par $(f|g)$ le nombre défini par :

$$(f|g) = \int_a^b f(t).g(t)dt \; ; \text{donc} : (f|g) = u(f \cdot g)(b) .$$

Si $(f|g) = 0$ nous dirons que f et g sont orthogonaux ou que f s'orthogonalise à g .

1 - Montrer que si P est un polynôme il en est de même de $u^k(P)$ pour $k \in N$. Si P est de degré p quel est le degré de $u^k(P)$. Montrer que $(x-a)^k$ divise $u^k(P)(x)$.

2 - Soit, pour $p \in N^*$, h définie par $h(x) = (b-x)^p$ quelles sont les racines de $\delta^k(h)$ pour $k \in N$.

3 - a) Préciser $\delta \circ u$.

b) Soit $\tau = u \circ \delta - \delta \circ u$. Quel est le rang de τ . Préciser les éléments de son noyau.

Soient f_1 et f_2 définis par $f_1(x) = \sin(x-a)$ et $f_2(x) = \cos(x-a)$

donner $\tau(f_1)$, $\tau(f_2)$ et $\tau^2(f_2) = \tau \circ \tau(f_2)$.

4 - A tout $(f,g) \in \mathcal{C}^2$ et $p \in N$ on associe l'application φ définie par :

$$\varphi = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \cdot \delta^k(f) \cdot u^{k+1}(g) .$$

a) Montrer que $\delta(\varphi)$ est réduit à une somme de deux termes .

b) Exprimer $u\left[f.g - (-1)^{p+1}\, \delta^{p+1}(f) \cdot u^{p+1}(g)\right]$

1) quand f est quelconque de $\mathcal{C}$,

2) quand f est un polynôme de degré inférieur ou égal à p ,

3) quand $f = h$.

5 - Calculer $\varphi(a)$. Σ o

6 - Pour $f = h$ montrer que $\varphi(b)$ est réduit à un terme.

7 - Supposons que g s'orthogonalise à tout polynôme de degré p inférieur à n ; donc $p < n$.

a) Que vaut alors l'image de b par $u^{p+1}(g)$?

b) On suppose en outre que g est un polynôme unitaire de degré n

1) Préciser alors les racines de $u^n(g)$ avec leur ordre de multiplicité.

2) Combien y a-t-il de racines de g appartenant à $]a,b[$?

II - 1) Soit $K(x) = (x-a)(x-b) = (x-s)^2 - \ell^2$. Préciser les constantes s et ℓ^2.

2) Soit $M(x) = (x-a)^n (x-b)^n = (K(x))^n$ et $S = \delta^n(M)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer $(x-a)(x-b)M'(x) - n(2x - a-b)M(x)$

b) Calculer $(x-a)(x-b)S''(x) + (2x - a-b)S'(x)$

III - Dans la suite on désigne par v l'application qui à tout $f \in \mathcal{C}$ associe l'application $v(f)$ définie pour tout $x \in [a,b]$ par

$$v(f)(x) = (x-a)(x-b)f''(x) + (2x-a-b)f'(x) .$$

Dans toute cette partie n désigne un entier naturel non nul.

(1) Montrer que v est un endomorphisme de $\mathcal{C}$.

(2) En donner des valeurs propres.

(3) Montrer que les polynômes 1 et $x \mapsto 3(x-s)^2 - \ell^2$ en sont deux vecteurs propres ; en donner les valeurs propres.

(4) Montrer qu'existe un polynôme unitaire, vecteur propre de v admettant 12 comme valeur propre. Préciser ce polynôme.

(5) Soient deux polynômes unitaires de même degré n , vecteurs propres de v . Quelle est la dimension de l'espace vectoriel qu'ils engendrent.

(6) On suppose maintenant qu'existent :

1) λ non entier ($\lambda \notin \mathbb{Z}$) valeur propre de v de vecteur propre $G \in \mathcal{C}$.

2) $x_0 \in [a,b]$ tel que $G(x_0) = 2\lambda \neq 0$; on prendra $0 < \lambda$.

et on pose $Q(x) = q(x-\alpha)(\beta-x)+1$ avec $0 < q$ et $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$.

a) Montrer que G s'orthogonalise à tout polynôme .

b) Montrer que l'on peut choisir q pour que $0 \leq Q(a)$ et $0 \leq Q(b$

c) Montrer que l'on peut choisir $\alpha < \beta$ tels que pour tout $x \in [\alpha,\beta]$ on ait $\lambda < G(x)$. Quelle est alors la valeur minimum prise par $Q(x)$ sur l'intervalle $\left[\frac{3\alpha+\beta}{4}, \frac{\alpha+3\beta}{4}\right] \subset [\alpha,\beta]$.

d) Quelle est la limite de la suite de terme général $\int_a^b |Q(x)|^n G(x)dx$ lorsque Q vérifie les propriétés énoncées en b) et c) ?

e) Montrer que l'hypothèse du paragraphe 6.1) ci-dessus conduit à une contradiction et conclure.

(7) Montrer qu'existent $n+1$ polynômes $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ de degrés inférieurs ou égaux à n , vecteurs propres de v de valeurs propres distinctes verifiant $(A_k|A_k) = 1$ pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

On pourra choisir A_k de degré k et tel que son terme en x^k ait un coefficient positif.

b) Soient $f \in \mathcal{C}$ et $x_0 = a, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n = b$ une suite croissante de $n+1$ nombres distincts. Montrer qu'existent et d'une manière unique $n+1$ constantes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ telles que la fonction $\psi = f - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k$ admette parmi ses racines les nombres $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. On pose $B = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k$.

c) Comparer les polynômes T et U de degrés inférieurs ou égaux à n qui rendent $(T-f|T-f)$ et $(U-\psi|U-\psi)$ minimum.
